ÉLECTROSTATIQUE

Chapitre 4

Conducteurs en équilibre électrostatique

4.1. Définition d'un conducteur

Conducteur en équilibre électrostatique

Un conducteur est un milieu matériel dans lequel certaines charges électriques, que l'on nommera « charges mobiles », sont susceptibles de se déplacer sous l'action d'un champ électrique. S'agissant de métaux ou d'alliages métalliques, ces charges mobiles sont négatives, portées par les électrons de conduction.

Champ électrique « mésoscopique »

Nous parlons ici de champ « thermodynamique », valeur moyenne du champ à l'échelle mésoscopique (échelle très petite par rapport à l'échelle du laboratoire et très grande par rapport à l'échelle des atomes). En effet, dans un tel matériau il existe également des charges fixes, source de champs électrostatiques microscopiques : nous ne parlons pas ici du champ microscopique au voisinage immédiat de ces charges pas plus que du champ microscopique au voisinage des porteurs mobiles.

De la même façon, lorsque nous parlons du « déplacement » des porteurs mobiles, nous parlons de leur éventuel mouvement moyen au sens mésoscopique. Les charges microscopiques sont soumises, y compris à l'équilibre électrostatique, à un mouvement stochastique incessant d'agitation thermique. Ce mouvement est de valeur moyenne nulle à l'échelle d'une cellule de matière de dimension mésoscopique et il ne lui correspond par conséquent aucun déplacement mésoscopique.

Le champ électrique est nul au cœur d'un conducteur en équilibre électrostatique

En l'absence de champ électrique dans le volume du conducteur, il n'y a pas de déplacement de charge et, réciproquement, l'équilibre électrostatique d'un conducteur implique la nullité du champ électrique dans la totalité du volume du conducteur.

Le volume d'un conducteur en équilibre électrostatique est équipotentiel

Dire que le champ électrique est nul, cela revient à affirmer que le volume tout entier d'un conducteur en équilibre électrostatique est équipotentiel. Nous parlons bien sûr du potentiel électrique au sens mésoscopique du terme, valeur moyenne du potentiel à l'échelle de cellules mésoscopiques de matière.

Champ et potentiel dans un conducteur en équilibre électrostatique

Dans le volume d'un conducteur $\mathcal{C}$ en équilibre électrostatique, le champ électrique est nul et le potentiel est uniforme.

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{C} : \quad \vec{E}(\mathrm{M}) = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad V(\mathrm{M}) = V_0 = C^{te}$$

Charges de surface, théorème de Coulomb

En conséquence du théorème de Gauss, nous déduisons que, dans le volume d'un conducteur en équilibre électrostatique, la densité volumique de charge est nécessairement nulle.

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \operatorname{div}\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \rho = 0$$

Si le conducteur est chargé, les charges mobiles se déplacent en surface en se disposant de telle sorte que le champ électrique soit nul dans tout le volume : nous admettrons, sans démonstration, qu'une telle répartition surfacique de charge est unique.

Rappelons la propriété de discontinuité du champ électrique à la traversée d'une surface chargée, démontrée au chapitre précédent :

$$\overrightarrow{E_1} - \overrightarrow{E_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n_1}$$

Cette propriété prend à la surface d'un conducteur à l'équilibre, le champ étant nul à l'intérieur, la forme particulière du *théorème de Coulomb.*

Théorème de Coulomb

Le champ électrostatique à la surface d'un conducteur en équilibre électrostatique est normal à la surface, dirigé vers l'extérieur si le conducteur est porteur d'une charge positive, vers l'intérieur si la charge est négative. La valeur algébrique du champ orienté par la normale extérieure est égale au rapport par ε_0 de la densité surfacique de charge électrique :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}_{\text{int}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}} \quad \textbf{et} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{E}_{\text{ext}}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}\overrightarrow{\boldsymbol{n}_{\text{ext}}}$$

Capacité d'un conducteur seul dans l'espace

Définition

Considérons un conducteur « seul dans l'espace », porteur d'une charge électrique Q répartie à sa surface en une densité surfacique $\sigma(\mathrm{M})$ avec, $\mathcal{S}$ étant la surface du conducteur :

$$Q = \oiint_{\mathrm{M}\in\mathcal{S}} \sigma(\mathrm{M})\,dS$$

Le potentiel du conducteur, l'origine étant choisie à l'infini, s'exprime comme l'opposé de la circulation du champ de l'infini à la surface du conducteur :

$$V = V(\mathrm{M}) = -\int_{\infty\to\mathrm{M}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{d\ell}$$

Cette circulation est indépendante du parcours et aussi indépendante du point M considéré à la surface du conducteur. Le conducteur étant considéré seul dans l'espace, son potentiel est dû à la seule présence des charges électriques à sa surface, soit :

$$V = V(\mathrm{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oiint_{\mathrm{M}\in\mathcal{S}} \frac{\sigma(\mathrm{M})\,dS}{\mathrm{PM}}$$

Imaginons une charge Q multipliée par un scalaire α quelconque. La charge surfacique $\sigma(\mathrm{M})$ en tout point M de la surface sera multipliée par ce paramètre α et ce sera aussi le cas du potentiel V au cœur du conducteur.

Nous en déduisons que la charge d'un conducteur seul dans l'espace est proportionnelle au potentiel de ce conducteur, l'origine des potentiels étant choisie à l'infini. Le coefficient de proportionnalité est qualifié de *capacité* du conducteur seul dans l'espace :

$$Q = CV$$

Cette capacité ne dépend *a priori* que du détail de la forme géométrique de la surface du conducteur.

Exemple d'un conducteur sphérique seul dans l'espace

Un conducteur sphérique de rayon R porteur d'une charge Q à l'équilibre présente, du fait de sa symétrie sphérique, une charge surfacique uniforme $\sigma = Q / 4\pi R^2$

Nous avons déjà exprimé le champ et le potentiel créé dans tout l'espace par une sphère uniformément chargée en surface. Ce champ est nul à l'intérieur de la sphère, preuve qu'il s'agit bien de la solution d'équilibre de la sphère conductrice chargée. À l'extérieur de la sphère, le champ et le potentiel ont pour expression :

$$\text{pour } r > R, \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r \qquad \text{et} \qquad V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}$$

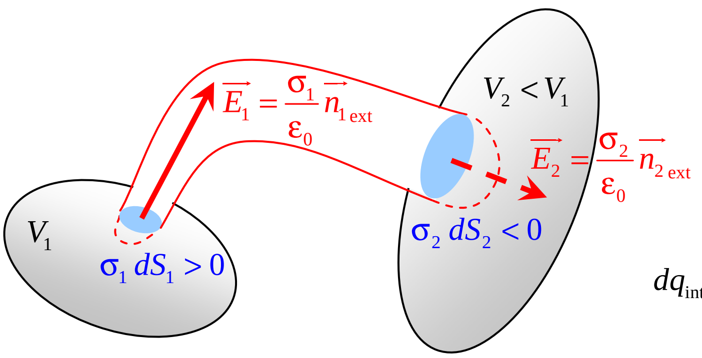
En particulier, à la surface du conducteur sphérique, pour $r = R$, le potentiel a pour valeur $V = Q / 4\pi\varepsilon_0 R$ et nous en déduisons la valeur de la capacité d'un sphère de rayon R seule dans l'espace :

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

4.2. Condensateur

Théorème des éléments de surface correspondants

Deux conducteurs $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, porteurs de charges électriques Q_1 et Q_2, acquièrent, à l'équilibre électrostatique, des distributions de charges correspondant à des potentiels uniformes V_1 et V_2 dans les volumes de chacun des conducteurs. Certaines lignes de champ joignent un conducteur à l'autre et l'orientation de ces lignes de champ définit celui des conducteurs dont le potentiel est le plus élevé :



$$dq_{\mathrm{int}} = \sigma_1\, dS_1 + \sigma_2\, dS_2 = 0$$

Considérons un tube de champ élémentaire joignant le conducteur $\mathcal{C}_1$ au conducteur $\mathcal{C}_2$ et construisons une surface fermée en posant des « capuchons » (représentés en pointillé sur la figure ci-dessus) dans le volume intérieur de chaque conducteur, à chacune des extrémités du tube de champ.

Le flux sortant du champ électrique à travers cette surface fermée est nul. Il est nul à travers les parois du tube de champ par le fait que, par définition, le champ électrique est tangent au tube. Il est nul à travers les capuchons par le fait que le champ électrique est nul à l'intérieur des conducteurs à l'équilibre.

En conséquence, par application du théorème de Gauss à cette surface élémentaire fermée, nous en déduisons que la charge intérieure, portée par les éléments de surface correspondants, est nulle. Cette affirmation constitue le théorème des éléments de surface correspondants :

Théorème des éléments de surface correspondants

Considérons des solides conducteurs en équilibre électrostatique et un tube de champ élémentaire autour d'une ligne de champ électrique joignant l'un des conducteurs à un autre de potentiel moindre. Le tube de champ élémentaire découpe sur ces conducteurs des surfaces élémentaires dS_1 et dS_2 que l'on qualifie d'« éléments de surface correspondants ».

Les éléments de surface correspondants sont porteurs de charges électriques $\sigma_1 dS_1$ et $\sigma_2 dS_2$ opposées.

Surfaces de deux conducteurs en influence totale : condensateur

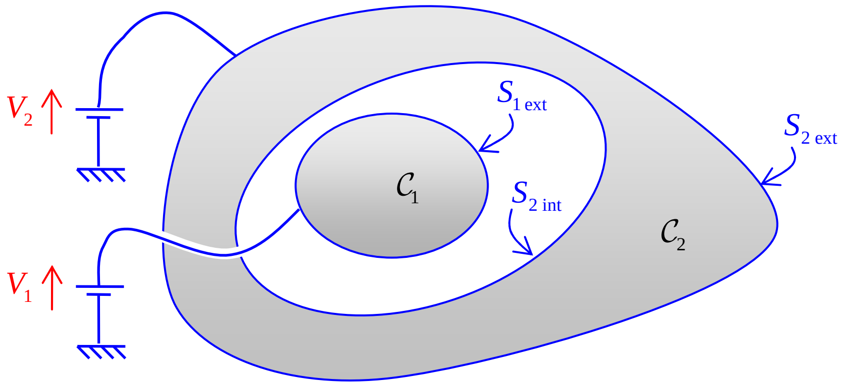
Influence totale

Nous dirons qu'une surface S_1 d'un conducteur $\mathcal{C}_1$ et une surface S_2 d'un second conducteur $\mathcal{C}_2$ sont sous influence totale lorsque toutes les lignes de champ quittant l'une des surfaces aboutissent à l'autre surface. En conséquence, les deux surfaces correspondantes sont porteuses de charges Q_1 et Q_2 opposées. Les deux surfaces conductrices en regard S_1 et S_2 constituent un système physique $\{S_1, S_2\}$ que l'on appelle « condensateur ».

Attention ! Prenons garde à cette règle élémentaire de topologie : un conducteur peut définir plusieurs surfaces, une surface extérieure et autant de surfaces intérieures qu'il possède de cavités disjointes. Toutes ces surfaces peuvent être porteuses de charges électriques.

La façon la plus simple de réaliser un condensateur est de considérer la surface extérieure $S_{1\,\text{ext}}$ d'un conducteur $\mathcal{C}_1$ placé à l'intérieur d'une cavité d'un conducteur creux $\mathcal{C}_2$.

Le système $\{S_{1\,\text{ext}}, S_{2\,\text{int}}\}$ est un condensateur.



Dans ce cas, nous noterons Q_1 la charge portée par le conducteur $\mathcal{C}_1$ et Q_2 la charge portée par le conducteur $\mathcal{C}_2$. Cette charge $Q_2 = Q_{2\,\text{int}} + Q_{2\,\text{ext}}$ se répartit sur les deux surfaces $S_{2\,\text{int}}$ et $S_{2\,\text{ext}}$ et les charges portées par les surfaces correspondantes du condensateur sont opposées : $Q_1 + Q_{2\,\text{int}} = 0$. On appelle « charge du condensateur » la charge de l'une quelconque des armatures, par exemple $Q = Q_1 = -Q_{2\,\text{int}}$.

Capacité d'un condensateur

La définition du potentiel implique une relation linéaire entre celui-ci et les charges portées par les conducteurs. Ainsi existe-t-il des coefficients constants C_{ij} tels que :

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ Q_{2\,\text{int}} + Q_{2\,\text{ext}} = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{cases}$$

Les *coefficients d'influence* C_{ij} ne dépendent que de la géométrie des surfaces des conducteurs.

Dans le cas particulier où le conducteur $\mathcal{C}_2$ est porté à un potentiel nul, la charge extérieure $Q_{2\,\text{ext}}$ est nulle et les relations de linéarité s'écrivent : $Q_1 = C_{11}V_1 = -Q_{2\,\text{int}} = -C_{21}V_1$. Nous poserons $C = C_{11} = -C_{21}$, coefficient positif, que l'on appelle « capacité » du condensateur $\{S_1, S_{2\,\text{int}}\}$.

Notons enfin que, dans le cas particulier où les deux conducteurs sont au même potentiel, la charge Q est nécessairement nulle, ce qui implique la relation $C_{11} + C_{12} = 0$, soit $C_{12} = -C_{11} = -C$.

Les relations de dépendance linéaire entre charges et potentiels s'écrivent finalement :

$$\begin{cases} Q_1 = CV_1 - CV_2 \\ Q_{2\,\text{int}} + Q_{2\,\text{ext}} = -CV_1 + C_{22}V_2 \end{cases}$$

La première relation définit la loi fondamentale des condensateurs, justifiant l'appellation de « capacité » pour ce coefficient C qui ne dépend, rappelons-le, que de la géométrie des surfaces en regard :

$$Q_1 = C(V_1 - V_2) = -Q_{2\,\text{int}}$$

Effet d'écran

La seconde relation devient alors $Q_{2\,\text{ext}} = (C_{22} - C)V_2$. Elle rend compte d'une propriété tout autant remarquable : la charge extérieure du conducteur $\mathcal{C}_2$ est indépendante du potentiel V_1 du conducteur intérieur. Nous dirons que le conducteur $\mathcal{C}_2$, entourant totalement le conducteur $\mathcal{C}_1$, *fait écran* à ce dernier. Notons que le coefficient $C_{22} - C$ s'identifie tout simplement à la capacité C_2 du conducteur $\mathcal{C}_2$ seul dans l'espace et ne dépend donc que de la géométrie de la surface extérieure $S_{2\,\text{ext}}$.

Application : la cage de Faraday

D'éventuelles expériences d'électrostatique se déroulant à l'intérieur d'un conducteur creux sont sans influence aucune sur les équilibres électrostatiques à l'extérieur de ce conducteur. Ainsi, la *cage de Faraday*, reliée à la masse, constitue-t-elle un blindage électrostatique quasi parfait. Elle protège les observateurs extérieurs de toute influence des facéties qui peuvent se dérouler à l'intérieur.

Énergie électrostatique d'un condensateur

Expression en fonction des potentiels

Notons $U = V_1 - V_2$ la différence de potentiels entre les armatures d'un condensateur porteur d'une charge $Q = Q_1 = -Q_2$. Le travail électrique qui doit être fourni pour faire varier algébriquement la charge de la valeur Q à la valeur $Q + dQ$ a pour expression : $\delta W = V_1\,dQ_1 + V_2\,dQ_2 = (V_1 - V_2)\,dQ = U\,dQ = CU\,dU$.

Ce travail est la différentielle d'une fonction d'état $\mathcal{E}_\text{e}$, énergie électrostatique du condensateur chargé, que l'on peut exprimer aussi bien comme fonction de la charge du condensateur ou comme fonction de la tension U :

$$\delta W = d\mathcal{E}_\text{e} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_\text{e} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Expression en fonction du champ

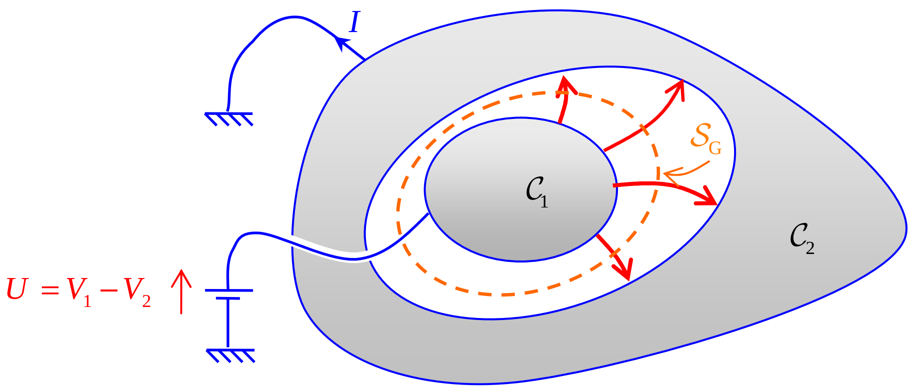
L'énergie électrostatique du condensateur est localisée dans le volume de l'espace entre les armatures, dans lequel s'établit un champ électrique lorsque le condensateur est chargé.

Si le milieu inter plaques est vide de toute matière polarisable, la densité volumique d'énergie électrostatique a pour expression en tout point $u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2$ et nous en déduisons l'expression de l'énergie par intégration sur tout le volume intérieur :

$$\mathcal{E}_e = \iiint_{\substack{\text{Volume}\\\text{intérieur}}} u_e \, d\tau = \iiint_{\substack{\text{Volume}\\\text{intérieur}}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 \, d\tau$$

Résistance de fuite d'un condensateur

Imaginons le cas particulier où le volume intérieur du condensateur a les propriétés électriques d'un conducteur ohmique homogène de conductivité uniforme γ.



Cela signifie, rappelons-le, qu'en tout point où existe un champ électrique $\vec{E}$, il apparaît une densité de courant $\vec{j}$ proportionnelle au champ, le coefficient de proportionnalité définissant la conductivité :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

Le courant de fuite I entre les armatures du condensateur tend à décharger ce dernier. Nous pouvons l'exprimer comme flux de la densité de courant $\vec{j}$ à travers n'importe quelle surface fermée entourant le conducteur intérieur $\mathcal{C}_1$, totalement située dans l'espace entre les deux armatures, telle que la surface $\mathcal{S}_G$ représentée en pointillé sur le schéma ci-dessus :

$$I = \oiint_{\mathcal{S}_G} \vec{j} \cdot \overrightarrow{n_{ext}} \, dS = GU$$

La relation de proportionnalité $I = GU$ entre le courant I et la tension U définit la conductance de fuite G du condensateur ou son inverse $R = \frac{1}{G}$, résistance de fuite du condensateur.

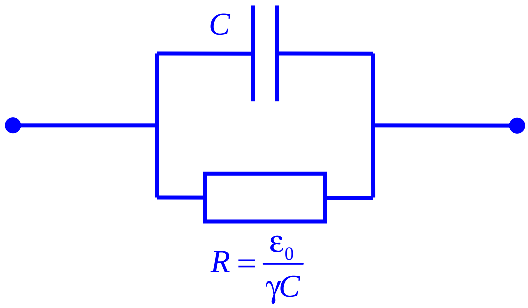
Remarquons que l'intensité I, flux de la densité de courant $\vec{j}$, est, dans le cas d'un milieu ohmique homogène, proportionnelle au flux du champ électrique $\vec{j}$ à travers la même surface $\mathcal{S}_G$. Seoln le théorème de Gauss, ce flux est proportionnel à la charge intérieure Q :

$$I = \oiint_{\mathcal{S}_G} \vec{j} \cdot \overrightarrow{n_{ext}} \, dS = \oiint_{\mathcal{S}_G} \gamma \vec{E} \cdot \overrightarrow{n_{ext}} \, dS = \gamma \oiint_{\mathcal{S}_G} \vec{E} \cdot \overrightarrow{n_{ext}} \, dS = \gamma \frac{Q}{\varepsilon_0} = \gamma \frac{C}{\varepsilon_0} U$$

Nous en concluons que, dans ce cas particulier d'un milieu ohmique homogène, et indépendamment de la forme géométrique des conducteurs, la conductance de fuite d'un condensateur est proportionnelle à la capacité. Si le milieu matériel entre les armatures a les propriétés diélectriques du vide, cette relation s'écrit :

$$G = \gamma \frac{C}{\varepsilon_0} \qquad \text{ou encore} \qquad RC = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$$

Remarque : la constante de temps RC est le temps caractéristique dans lequel le condensateur se décharge à travers sa propre conductance interne. Ce temps est proportionnel à la résistivité (inverse de la conductivité) du milieu matériel entre les armatures. Le condensateur est alors électriquement équivalent à un condensateur idéal de même capacité monté en parallèle avec cette résistance de fuite.



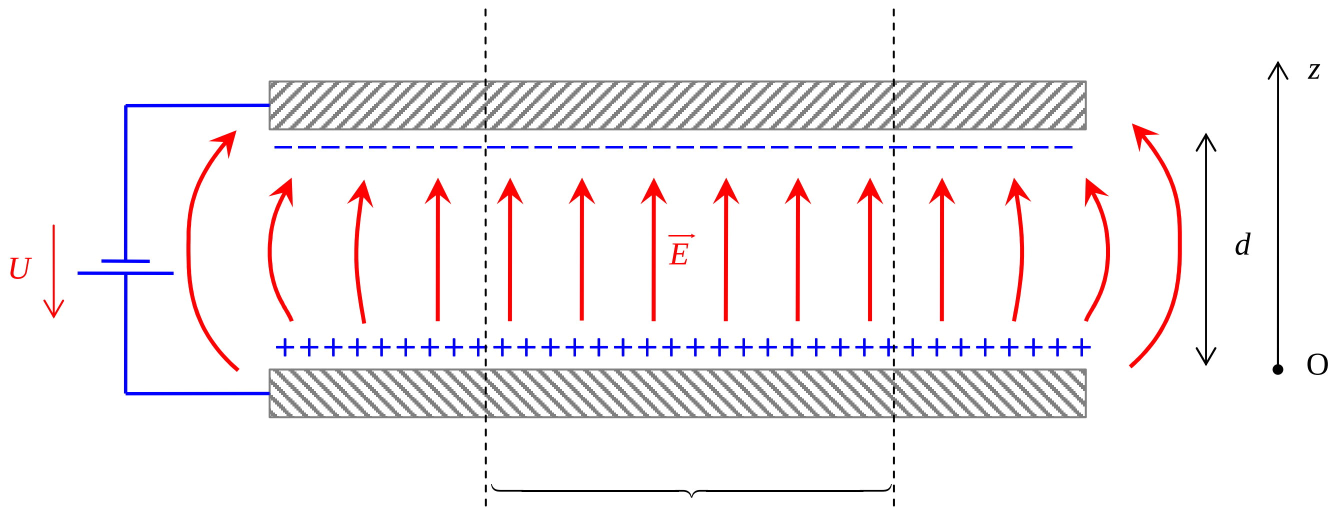
4.3. Exemples de condensateurs de géométries particulières

Condensateur plan

Étude de symétrie

Deux plaques métalliques planes parallèles sont disposées à une distance mutuelle d très petite par rapport à leurs dimensions linéaires caractéristiques, de telle sorte que les « effets de bords » puissent être négligés : le condensateur ainsi formé se trouve, pour la plus grande partie de sa surface, dans une situation présentant une symétrie d'invariance par translation quelconque parallèle aux plaques, comme si les plaques étaient infinies.

Une différence de potentiel étant instaurée entre les deux conducteurs, les surfaces en regard se retrouvent chargées, la plaque de potentiel le plus élevé étant porteuse de charges positives.



Si l'on se place suffisamment loin des bords, un axe Oz perpendiculaire aux plaques est un axe de symétrie de la distribution de charge : le champ électrique entre les armatures est donc orthogonal aux plaques et, du fait de l'invariance par translation, ne dépend que de z :

$$\vec{E} = E_z(z)\,\vec{e}_z$$

Par application du théorème de Gauss sur une surface fermée cylindrique d'axe Oz totalement située entre les plaques, on démontre facilement que le champ électrique est uniforme entre les armatures et, connaissant le module du champ $E = \sigma/\varepsilon_0$ à la surface des plaques métalliques (σ est la densité surfacique de charge de l'armature chargée positivement), le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_z}$$

La différence de potentiel, égale à l'opposé de la circulation du champ d'une armature à l'autre, a pour expression : $U = Ed = \sigma d/\varepsilon_0$

Expression de la capacité

La charge surfacique est proportionnelle à la tension et le coefficient de proportionnalité définit la capacité surfacique du condensateur :

$$\frac{C}{S} = \frac{\sigma}{U} = \frac{\varepsilon_0}{d} \qquad \text{soit} \qquad C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Point de vue énergétique

L'énergie électrostatique surfacique du condensateur chargé, de valeur $\frac{\mathcal{E}_\mathrm{e}}{S} = \frac{1}{2}\frac{C}{S}U^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{d}U^2$ est localisée entre les armatures avec, dans la zone sans effet de bord, une répartition volumique uniforme.

La densité volumique d'énergie est égale au rapport de l'énergie surfacique $\frac{\mathcal{E}_\mathrm{e}}{S}$ par l'épaisseur d :

$$u_\mathrm{e} = \frac{\mathcal{E}_\mathrm{e}}{Sd} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Condensateur cylindrique

Étude de symétrie

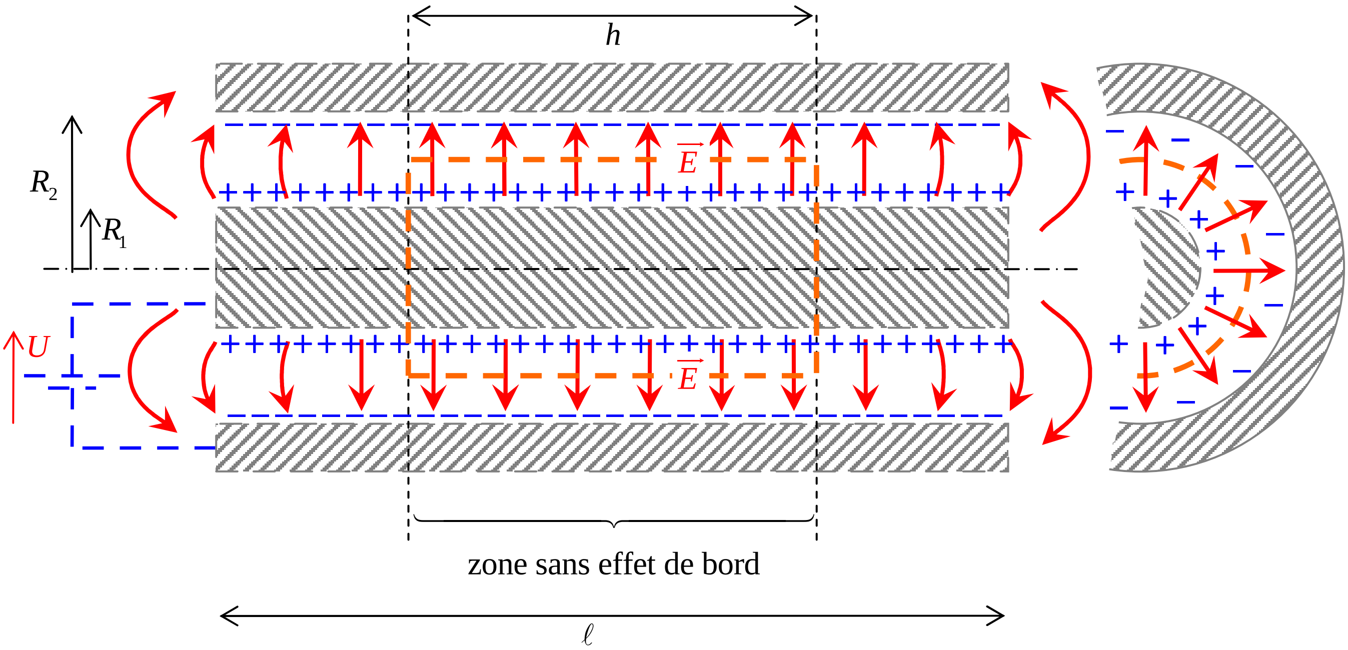
Un cylindre métallique plein de rayon R_1 est placé sur l'axe Δ d'un cylindre creux de rayon intérieur R_2 et de même longueur ℓ supposée très grande par rapport à R_2, de telle sorte que les « effets de bords » puissent être négligés : le condensateur ainsi formé se trouve, pour la plus grande partie de sa surface, dans une situation présentant une symétrie d'invariance par translation parallèle à l'axe des cylindres et d'invariance par rotation autour de cet axe, comme si les cylindres étaient infinis. Soit, en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) d'axe Δ :

$$\vec{E} = E_\rho(\rho)\vec{e_\rho}(\varphi)$$

Une différence de potentiel étant instaurée entre les deux conducteurs, les surfaces en regard se retrouvent chargées, le cylindre de potentiel le plus élevé étant porteur de charges positives.

Appliquons le théorème de Gauss sur une surface fermée constituée d'une surface latérale cylindrique d'axe Δ et de hauteur h et de « couvercles » circulaires : le flux sortant d'une telle surface se réduit au seul flux $2\pi\rho h E_\rho(\rho)$ à travers la surface latérale, tandis que la charge intérieure est égale à $2\pi R_1 h\sigma_1$ où σ_1 est la densité surfacique de charge portée par le cylindre intérieur. Nous déduisons l'expression du champ électrique radial :

$$E_\rho(\rho) = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\frac{R_1}{\rho}$$



Expression de la capacité

Notons que la densité surfacique σ_2 portée par la surface cylindrique opposée a une valeur différente de σ_1 de telle sorte que la charge totale Q_2 portée par la surface intérieure du conducteur extérieur soit, conformément au théorème des éléments de surface correspondants, opposée à Q_1 :

$$Q_2 = 2\pi R_2 \ell \sigma_2 = -Q_1 = -2\pi R_1 \ell \sigma_1 \qquad \text{soit} \qquad R_2 \sigma_2 = -R_1 \sigma_1 = -\frac{Q}{2\pi \ell}$$

Nous déterminons l'expression de la capacité linéique d'un tel condensateur en calculant l'opposé de la circulation du champ électrique entre les deux armatures sur un parcours radial :

$$U = -\int_{R_2}^{R_1} E_\rho(\rho)\, d\rho = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \frac{R_1}{\rho} d\rho = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Soit $\dfrac{Q}{\ell} = \dfrac{C}{\ell} U$ avec $\dfrac{C}{\ell} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}$

Remarque : plaçons nous dans le cas où l'épaisseur diélectrique e de la cavité est très petite, soit $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$. L'expression de la capacité linéique, limitée au premier ordre en e/R_1, devient :

$$\frac{C}{\ell} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(1 + \dfrac{e}{R_1}\right)} = 2\pi\varepsilon_0 \frac{R_1}{e}\left(1 + o\left(\frac{e}{R_1}\right)\right)$$

Cela correspond à l'expression de la capacité surfacique d'un condensateur plan d'épaisseur e :

$$\frac{C}{S} = \frac{C}{2\pi R_1 \ell} \approx \frac{\varepsilon_0}{e}$$

Nous retrouverons ce comportement limite dans tous les cas où l'épaisseur diélectrique d'un condensateur est très petite par rapport aux rayons de courbure des armatures.

Point de vue énergétique

L'énergie électrostatique linéique du condensateur chargé, de valeur $\frac{\mathcal{E}_e}{\ell}=\frac{1}{2}\frac{C}{\ell}U^2=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(R_2/R_1\right)}U^2$ est localisée entre les armatures.

La densité volumique d'énergie, dans la zone sans effet de bord, n'est fonction que de la distance radiale à l'axe Δ :

$$u_e(\rho)=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_\rho(\rho)^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\rho\ell}\right)^2=\frac{1}{8\pi^2\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\ell}\right)^2\frac{1}{\rho^2}$$

Pour retrouver l'énergie électrostatique linéique, intégrons la densité volumique sur toute la surface diélectrique comprise entre les électrodes. L'intégration se fait sommation de contributions de couronnes élémentaires de rayon compris entre ρ et $\rho+d\rho$.

$$\frac{\mathcal{E}_e}{\ell}=\int_{R_1}^{R_2}u_e(\rho)\times 2\pi\rho\,d\rho=\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{8\pi^2\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\ell}\right)^2\frac{1}{\rho^2}2\pi\rho\,d\rho=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\ell}\right)^2\int_{R_1}^{R_2}\frac{d\rho}{\rho}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\ell}\right)^2\ln\frac{R_2}{R_1}$$

Avec $\frac{Q}{\ell}=\frac{C}{\ell}U=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(R_2/R_1\right)}U$, nous retrouvons bien l'expression attendue, $\frac{\mathcal{E}_e}{\ell}=\frac{1}{2}\frac{C}{\ell}U^2$.

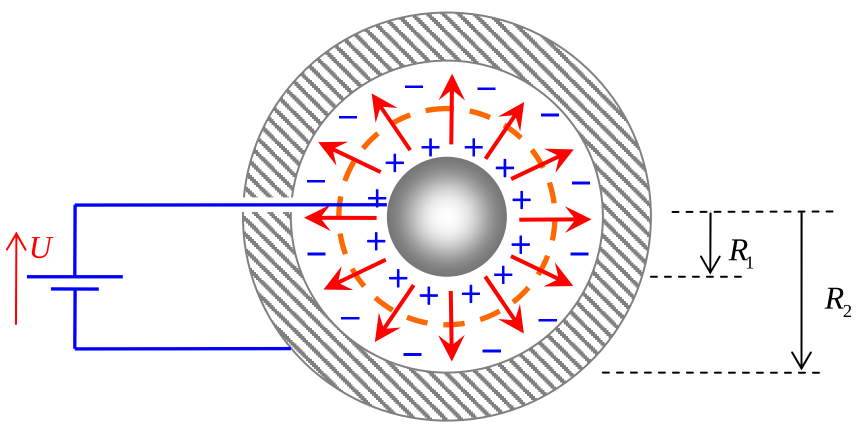
Condensateur sphérique

Étude de symétrie

Une sphère métallique pleine de rayon R_1 est placée au centre O d'une sphère creuse de rayon intérieur R_2 : le condensateur ainsi formé présente une symétrie sphérique de centre O, ce qui implique qu'en tout point de l'espace le champ électrique est radial et la composante radiale ne dépend que la distance r au centre O. Soit, en coordonnées sphériques $(r,\,\theta,\,\varphi)$:

$$\vec{E}=E_r(r)\,\vec{e_r}(\theta,\,\varphi)$$

Une différence de potentiel étant instaurée entre les deux conducteurs, les surfaces en regard se retrouvent chargées, la sphère de potentiel le plus élevé étant porteuse de charges positives.
Appliquons le théorème de Gauss sur une surface sphérique concentrique de rayon r compris entre R_1 et R_2 : le flux sortant d'une telle surface a pour valeur $4\pi r^2 E_r(r)$ tandis que la charge intérieure est égale à $4\pi R_1^2\sigma_1$ où σ_1 est la densité surfacique de charge portée par la sphère intérieure.



Nous déduisons l'expression du champ électrique radial : $E_r(r) = \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\dfrac{R_1^2}{r^2}$

Expression de la capacité

Notons que la densité surfacique σ_2 portée par la surface sphérique opposée a une valeur différente de σ_1 de telle sorte que la charge totale Q_2 portée par la surface intérieure du conducteur extérieur soit opposée à Q_1, conformément au théorème des éléments de surface correspondants :

$$Q_2 = 4\pi R_2^2\,\sigma_2 = -Q_1 = -4\pi R_1^2\,\sigma_1 \qquad \text{soit} \qquad R_2^2\,\sigma_2 = -R_1^2\,\sigma_1 = -\frac{Q}{4\pi}$$

Nous déterminons l'expression de la capacité linéique d'un tel condensateur en calculant l'opposé de la circulation du champ électrique entre les deux armatures sur un parcours radial :

$$U = -\int_{R_2}^{R_1} E_r(r)\,dr = -\int_{R_2}^{R_1}\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\frac{R_1^2}{r^2}\,dr = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}R_1^2\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

Soit $Q = CU$ avec
$$C = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_2R_1}{R_2-R_1}$$

Remarque : ici encore, si l'on se place dans le cas où l'épaisseur diélectrique e de la cavité est très petite, soit $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$. L'expression de la capacité, limitée au premier ordre en e/R_1, devient :

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1(R_1+e)}{e} = \varepsilon_0\frac{4\pi R_1^2}{e}\left(1+\mathrm{o}\left(\frac{e}{R_1}\right)\right)$$

Cela correspond à l'expression de la capacité surfacique d'un condensateur plan d'épaisseur e :

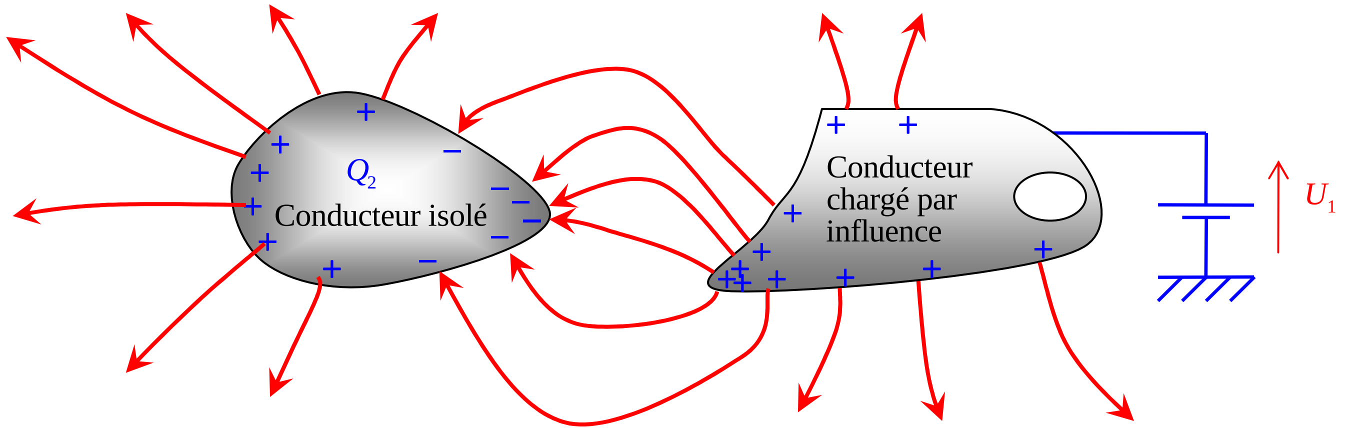
$$C \approx \varepsilon_0\frac{4\pi R_1^2}{e} = \varepsilon_0\frac{S}{e}$$

4.4. Exemples de conducteurs en équilibre électrostatique

Étude qualitative

Conducteur isolé, conducteur chargé par influence

Un conducteur peut être isolé et sa charge électrique globale est alors constante, ce qui ne signifie en aucun cas que sa charge surfacique soit nécessairement nulle en tout point. Dans un environnement électrostatique donné, ce conducteur définira à l'équilibre un volume équipotentiel.



Un conducteur peut aussi se voir imposer un potentiel en étant relié à un générateur de charges électriques. Dans un environnement électrostatique donné, ce conducteur acquérra une charge électrique qui se répartira à sa surface de telle sorte que le potentiel imposé soit établi dans tout son volume : on dit alors que le conducteur se charge par influence.

Unicité de la solution

Dans les espaces entre les conducteurs, vides de toute charge, le potentiel électrostatique est une solution de l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ satisfaisant aux conditions aux limites à la surface des conducteurs. Ces surfaces doivent chacune être équipotentielles, porteuses d'une charge totale égale à la charge constante du conducteur dans le cas de conducteurs isolés ou de potentiels égaux aux potentiel imposés dans le cas d'une charge par influence.

Nous admettrons l'unicité de la solution de l'équation de Laplace compatible avec les conditions aux limites imposées. Aussi, dès lors que, par quelques considérations de symétries particulières, nous savons identifier une solution possible, nous pouvons prétendre avoir trouvé <u>la</u> solution.

Propriétés générales des lignes de champ et des surfaces équipotentielles

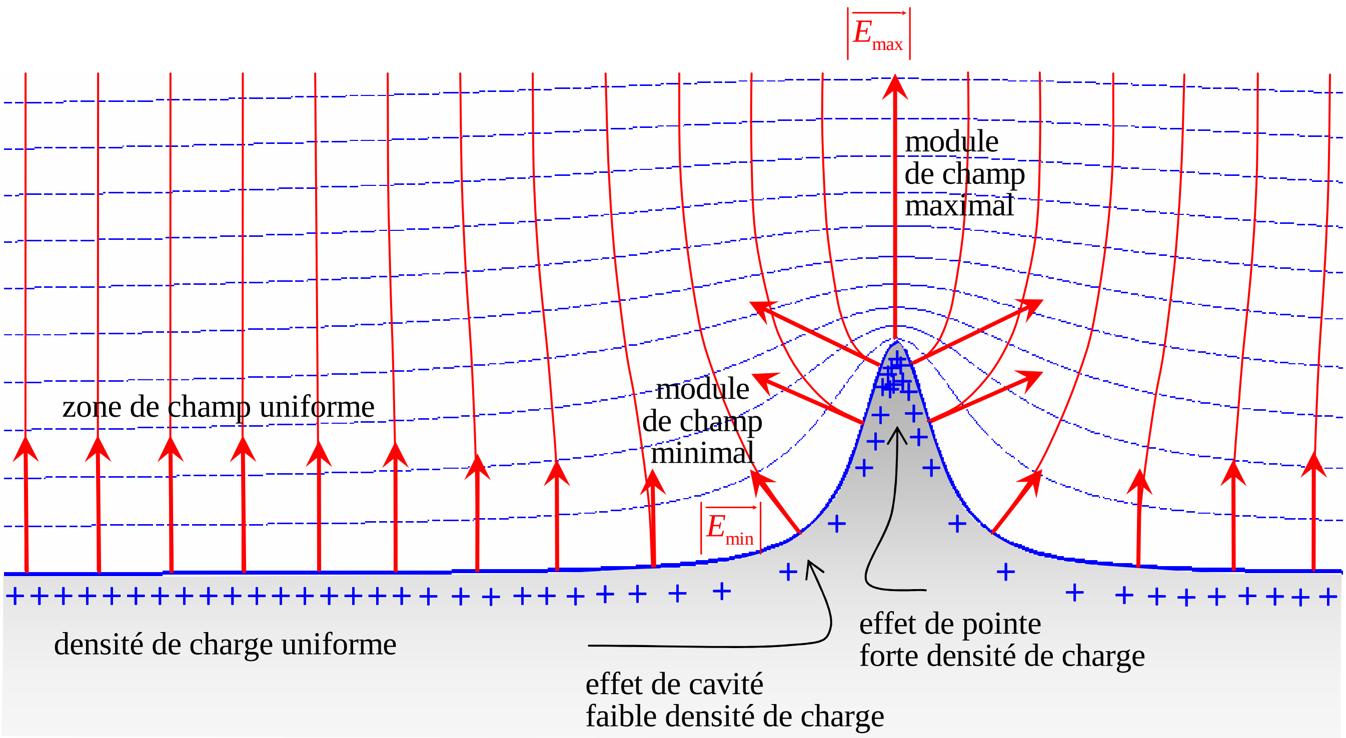
Dans tous les cas, les lignes de champ sont normales à la surface des conducteurs (avec une exception possible en certains points de surface où la densité de charge est nulle, et donc aussi le champ électrique).

Les lignes de champ, obéissant au théorème des éléments de surface correspondants, joignent toujours un point de densité surfacique positive à un point de densité surfacique négative. Attention cependant : un même conducteur peut être porteur en certains endroits de charges positives et en d'autres endroits de charges négatives.

De la même façon qu'une ligne de champ électrostatique ne peut se refermer sur elle-même, une ligne de champ quittant la surface d'un conducteur ne peut en aucun cas aboutir sur le même conducteur.

Pouvoir des pointes. Effet de cavité

Considérons le champ électrique quasi uniforme au voisinage de la surface localement plane d'un conducteur. À ce champ correspondent, pour des écarts de potentiels équidistants, des surfaces équipotentielles planes équidistantes.



Imaginons la présence d'une pointe métallique orthogonale à cette surface chargée. À grande distance, l'équilibre électrostatique ne sera pas perturbé, mais à courte distance, les surfaces équipotentielles se trouveront resserrées. Cela correspond à un gradient de potentiel particulièrement important dans la direction de la pointe et donc à une composante de champ électrique particulièrement importante dans cette direction : c'est ce phénomène que l'on baptise « *pouvoir des pointes* ».

Application : le paratonnerre fonctionne selon ce principe. La situation orageuse correspond à la création d'un effet capacitif entre la terre et les nuages. La tension devenant trop importante, le claquage est inévitable : c'est l'*éclair*, phénomène lumineux, et le *tonnerre*, phénomène sonore qui lui est associé.

Le fait d'installer une pointe métallique directement reliée au sol au plus haut point d'un village, par exemple au sommet du clocher de son église, crée un point d'accumulation de charges et de champ électrique extrémal à partir duquel se déclenchera préférentiellement l'éclair. La canalisation des charges électriques dans un fil conducteur dimensionné à cet effet permet d'éviter les destructions plus importantes qui se produisent lorsque la foudre « s'abat » n'importe où, dans des conditions non maîtrisées.

Exemple de la polarisation d'une sphère conductrice isolée, non chargée, introduite dans une zone de champ uniforme

Une sphère conductrice, de charge globale nulle est introduite dans une région d'espace où le champ est uniforme. Par l'action de ce champ, la sphère se polarise. Des charges positives migrent dans le sens du champ tandis que des charges négatives migrent dans le sens opposé et ceci jusqu'à ce que le champ résultant soit nul à l'intérieur de la sphère.

Le champ uniforme $\overrightarrow{E_1} = E_0 \overrightarrow{e_z}$ doit se retrouver comme condition aux limites à l'infini. Ce champ est associé à la fonction potentiel $V_1 = -E_0 z$, soit en coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'axe polaire Oz :

$$V_1 = -E_0\, r \cos\theta$$

La sphère métallique centrée en O dans ce champ uniforme constitue un système invariant par rotation autour de l'axe Oz. Nous connaissons une solution de l'équation de Laplace qui a cette symétrie, la fonction « potentiel dipolaire » faisant intervenir un paramètre scalaire p homogène à un moment dipolaire :

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\cos\theta}{r^2}$$

Nous allons montrer qu'une fonction potentiel $V(r, \theta) = V_1 + V_2$, somme de ces deux contributions, est compatible avec les conditions aux limites imposées au système, pourvu que l'on choisisse correctement la valeur du moment dipolaire p.

Le potentiel à la surface de la sphère doit être constant, et même nul puisque la sphère, électriquement isolée et initialement non chargée, doit rester de charge globale nulle. Cette condition nécessaire s'écrit :

$$V(R, \theta) = -E_0\, R\cos\theta + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{R^2} = 0 \qquad \forall\theta, \quad \text{soit} \quad p = 4\pi\varepsilon_0 E_0\, R^3$$

Avec une telle fonction potentiel, nous sommes assurés de retrouver le champ uniforme à très grande distance de la sphère métallique.

$$V(r, \theta) = -E_0\, r\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta$$

Nous admettons l'unicité de la solution. Cette solution particulière satisfaisant à toutes les contraintes imposées est donc la solution unique du problème.

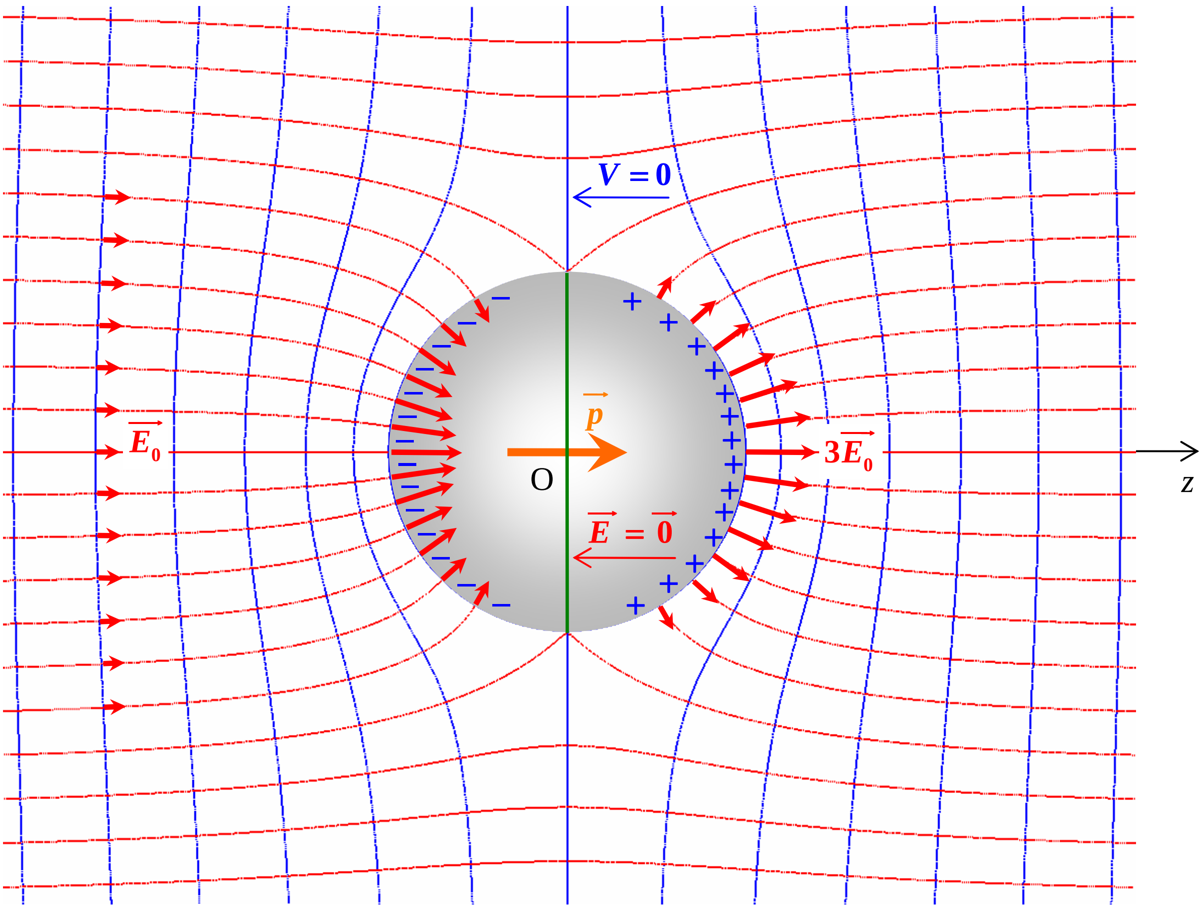
Exprimons, par dérivation en coordonnées sphériques[1], le champ électrique associé à cette fonction potentiel :

$$\vec{E}\left|\begin{array}{l} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = E_0\left(1+2\dfrac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = -E_0\left(1-\dfrac{R^3}{r^3}\right)\sin\theta \\ E_\varphi = -\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \end{array}\right. \qquad \text{et, en particulier,}\quad \vec{E}\,(R,\,\theta)\left|\begin{array}{l} E_r = 3E_0\cos\theta \\ E_\theta = 0 \\ E_\varphi = 0 \end{array}\right.$$

La valeur de E_r à la surface de la sphère définit la densité surfacique de charge : $E_r = -3E_0\cos\theta = \sigma/\varepsilon_0$

Soit $\sigma(\theta) = \sigma_0\cos\theta$ avec $\sigma_0 = 3\varepsilon_0 E_0$.

La figure ci-dessous représente les lignes de champ (en rouge) et les équipotentielles (en bleu) dans un plan méridien. On y voit de quelle façon les surfaces équipotentielles sont compressées par l'intrusion de la sphère métallique. Ce plus fort gradient du potentiel correspond à une plus grande valeur du module du champ électrique.



Remarque : les points équatoriaux —représentés en vert— à la surface de la sphère conductrice semblent bien particuliers. En effet, les lignes de champ présentent des rebroussements en ces points. Cela n'est possible que parce que le champ électrique est alors nul.

[1] Le champ n'ayant pas de composante ortho méridienne E_φ, il s'agit en fait de la simple expression du gradient en coordonnées polaires dans le plan méridien.

Exemple d'un conducteur cylindrique isolé, initialement chargé, introduit dans une zone de champ uniforme orthogonal à l'axe du cylindre

Le problème posé est typiquement un problème d'école : le conducteur chargé est infini et de plus, dans ce problème, la charge totale de l'univers n'est pas nulle. Le choix d'un potentiel nul à l'infini est donc impossible. Nous allons rechercher des solutions de l'équation de Poisson respectant les symétries du problème exprimées dans le système de coordonnées cylindriques $(\rho,\ \varphi,\ z)$ ayant pour axe Oz l'axe du conducteur cylindrique et pour axe polaire Ox la direction et le sens du champ uniforme $\vec{E} = E_0\,\vec{e_x}$.

Pour rendre compte de l'existence de ce champ uniforme à grande distance du conducteur, nous introduirons une première contribution au potentiel de la forme $V_1 = -E_0\,x = -E_0\,\rho\cos\varphi$.

Pour rendre compte de l'action de la charge linéique du conducteur, de densité linéique λ_0, nous y ajouterons une deuxième contribution de type « potentiel filaire » : $V_2 = -\dfrac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{\rho}{a}$

Le choix de la longueur a déterminera l'origine des potentiels.

Enfin, pour rendre compte de l'effet polarisant du champ électrique uniforme, nous allons introduire une troisième contribution au potentiel, solution de l'équation de Laplace $\Delta V = 0$, de la forme $V_3 = K\dfrac{\cos\varphi}{\rho}$.

Cette contribution est qualifiée de « potentiel bifilaire » : une telle fonction potentiel rend compte du comportement à grande distance d'un système de deux fils rectilignes infinis parallèles et porteurs de charges linéiques opposées.

Attention à ne pas confondre le potentiel *bifilaire*, exprimé ici **en coordonnées cylindriques** $(\rho,\ \varphi,\ z)$ par la fonction $\dfrac{\cos\varphi}{\rho}$, avec le potentiel *dipolaire*, autre solution de l'équation de Laplace qui s'exprime, **en coordonnées sphériques** $(r,\ \theta,\ \varphi)$, par la fonction $\dfrac{\cos\theta}{r^2}$.

Nous recherchons donc si une solution de la forme $V_1 + V_2 + V_3$ peut satisfaire à l'ensemble des contraintes imposées :

$$V(\rho,\ \varphi,\ z) = V_1 + V_2 + V_3 = -E_0\,\rho\cos\varphi - \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho}{a} + K\frac{\cos\varphi}{\rho}$$

Tout d'abord, la surface du cylindre de rayon R doit être équipotentielle : ceci impose la valeur de la constante K, c'est-à-dire le degré de polarisation du conducteur cylindrique :

$$V(R,\ \varphi,\ z) = -\left(E_0\,R - \frac{K}{R}\right)\cos\varphi - \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{a} \quad \text{indépendant de } \varphi \quad \Rightarrow \quad K = E_0\,R^2$$

D'où l'expression possible de la fonction potentiel :

$$V(\rho,\ \varphi,\ z) = -E_0\,\rho\left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right)\cos\varphi - \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho}{a}$$

Déterminons le champ électrique dérivant d'un tel potentiel par dérivation en coordonnées cylindriques et calculons en particulier la répartition surfacique de charges sur le conducteur cylindrique, pour $\rho = R$.

$$\vec{E}\left|\begin{array}{l} E_\rho = -\dfrac{\partial V}{\partial \rho} = E_0\left(1+\dfrac{R^2}{\rho^2}\right)\cos\varphi + \dfrac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0\,\rho} \\ E_\varphi = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} = -E_0\left(1-\dfrac{R^2}{\rho^2}\right)\sin\varphi \\ E_z = \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{array}\right. \qquad \text{et, en particulier,} \quad \vec{E}\left(R,\varphi\right)\left|\begin{array}{l} E_\rho = 2E_0\cos\varphi + \dfrac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0\,R} \\ E_\varphi = 0 \\ E_z = 0 \end{array}\right.$$

Le champ électrique est bien orthogonal à la surface du conducteur : c'est une première nécessité. Pour satisfaire la loi de Coulomb, nous en déduisons l'expression de la densité surfacique de charge :

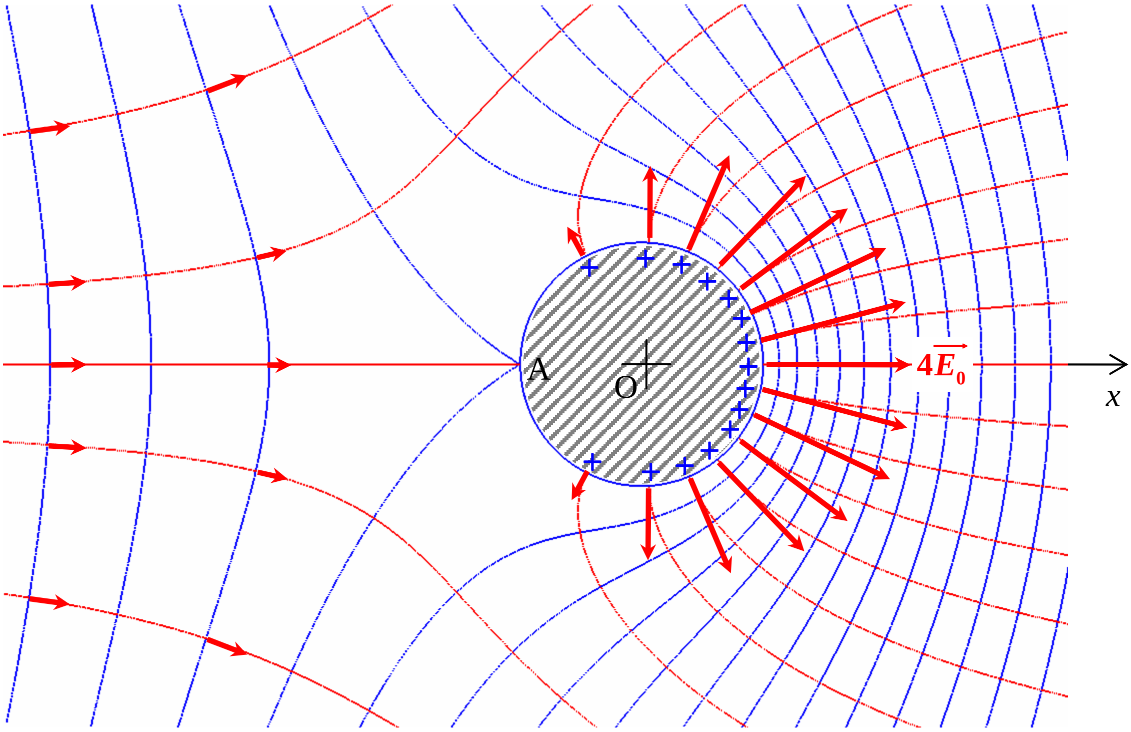
$$E_\rho = 2E_0\cos\varphi + \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0\,R} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma(\varphi) = 2\varepsilon_0 E_0\cos\varphi + \frac{\lambda_0}{2\pi R}$$

La sommation sur un tour de $R\sigma(\varphi)$ nous donne bien la valeur de la charge linéique λ_0 du conducteur :

$$\int_0^{2\pi} R\sigma(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(2\varepsilon_0 E_0 R\cos\varphi + \frac{\lambda_0}{2\pi}\right)d\varphi = \lambda_0$$

Toutes les conditions aux limites sont donc satisfaites et nous pouvons affirmer avoir mis en évidence la solution du problème posé.

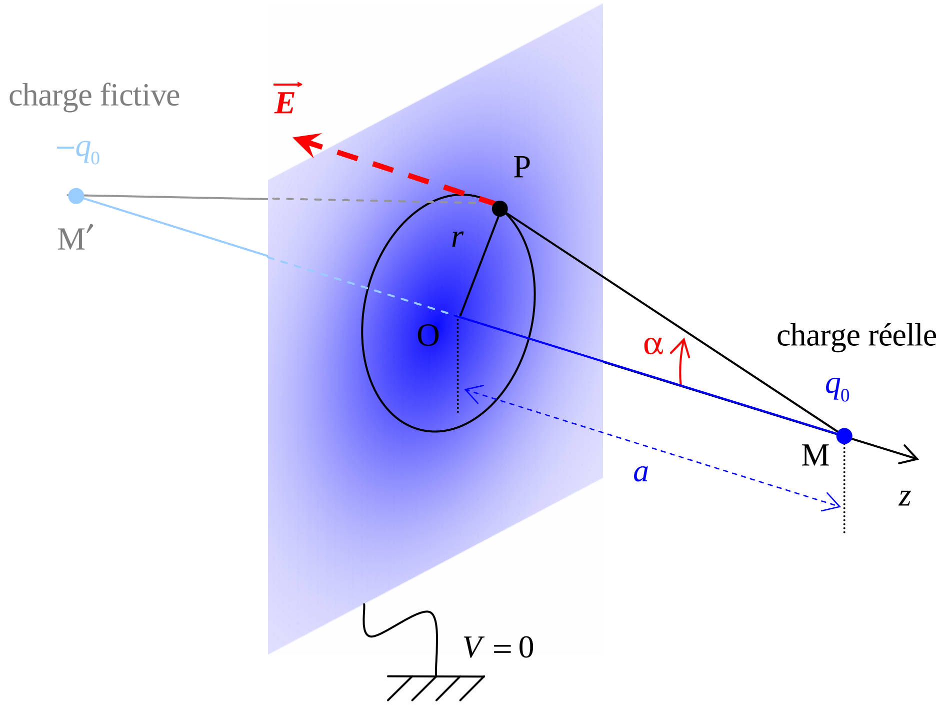
Le schéma ci-dessous correspond au cas particulier d'un cylindre chargé positivement, avec $\lambda_0 = 4\pi\varepsilon_0 E_0 R$. Il s'agit bien sûr d'un plan de coupe orthogonal à l'axe du cylindre. Comme précédemment, les lignes de champ sont en rouge et les équipotentielles en bleu.



Remarque : cette figure est tracée à l'aide d'un logiciel de calcul formel (en l'occurrence, il s'agit de MAPLE). Le tracé des ces courbes à partir des expressions analytiques du champ et du potentiel n'est évidemment pas exigible en temps limité. Par contre, l'interprétation de ce schéma et la reconnaissance sur celui-ci de quelques lois de l'électrostatique est un bon exercice. Par exemple, au vu de la carte des champs et équipotentielles, que vaut le champ électrique au point A ?

Exemple de la charge par influence d'un conducteur plan de potentiel nul à l'approche d'une charge ponctuelle

Voici un dernier exemple de conducteur en équilibre électrostatique. Un plan métallique est relié à la masse, c'est-à-dire porté au potentiel de l'infini. De très loin, une charge électrique ponctuelle q_0 est amenée en un point M à la distance a d'un point O de ce plan. Celui-ci, par influence, va se charger négativement d'une charge opposée $-q_0$ et l'on se propose d'établir la loi de répartition surfacique des charges dans le plan.



Nous ne savons pas résoudre directement l'équation de Laplace $\Delta V = 0$, mais nous connaissons une solution satisfaisant à l'ensemble des conditions aux limites imposées. En effet, si nous considérons le dipôle constitué d'une charge q_0 placée en M et d'une charge $-q_0$ placée en M′, symétrique de M par rapport au plan conducteur, nous savons que ce doublet de charges produirait un potentiel nul dans le plan médiateur du segment MM′.

La référence à l'unicité des solutions nous permet d'affirmer que le champ créé par le doublet dans le plan médiateur est orthogonal à ce plan et a pour valeur algébrique :

$$E_z(r) = -2\times\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha}{r^2+a^2} = -\frac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\frac{a}{\left(r^2+a^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma(r)}{\varepsilon_0}$$

La charge électrique dq contenue dans une couronne de rayon compris entre r et $r+dr$ a pour expression :

$$\text{avec } \sigma(r) = -\frac{q_0}{2\pi}\frac{a}{\left(r^2+a^2\right)^{3/2}}, \qquad dq = 2\pi r\,\sigma(r)\,dr = -\,q_0\frac{a\,r}{\left(r^2+a^2\right)^{3/2}}dr$$

Son intégrale étendue à la totalité de la surface du plan conducteur s'écrit :

$$q = \int_0^\infty 2\pi r\,\sigma(r)\,dr = -\,q_0\int_0^\infty \frac{a\,r}{\left(r^2+a^2\right)^{3/2}}dr = -\,q_0$$

Résultat sans surprise, non ?